Planche n° 24. Structures

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*T)**

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $*$ par

$$\forall((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2,\ (x,y)*(x',y') = \left(x+x', ye^{x'}+y'e^{-x}\right).$$

1) Montrer que $\left(\mathbb{R}^2,*\right)$ est un groupe non abélien.

2) Trouver les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x,f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2,*\right)$.

Exercice n° 2 (*T)**

Sur $]-1,1[$, on définit une loi $*$ par

$$\forall(x,y) \in (]-1,1[)^2,\ (x,y)*(x',y') = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(]-1,1[,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice n° 3 (*IT)

1) Montrer que U est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, U_n est un sous-groupe de $(U,\times)$.

Exercice n° 4 (T)**

Sur E un ensemble.

1) Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau commutatif.

Exercice n° 5 (T)**

Montrer que $\left(\left\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\right\},+,\times\right)$ est un corps commutatif.

Exercice n° 6 (*I)** (Sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$)

1) Soient a un entier relatif puis $G = a\mathbb{Z}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

2) Réciproquement, montrer que tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{Z}$ (considérer, s'il existe, $a = \mathrm{Min} G \cap \mathbb{Z}_+^*$).

Exercice n° 7 (*I)** (Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$)

1) Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a = \mathrm{Inf}\ (G\cap]0;+\infty[)$ puis envisager les deux cas $a=0$ et $a>0$.

(Rappel : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ |y-x|<\varepsilon)$.

2) Application 1. Montrer que $\left\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).

a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).

b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

c) Trouver une fonction dont le groupe des périodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas égal à $\mathbb{R}$.

